CURSO COMPLETO: MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRÓNICA

Video 10 — Parte 5B: Diagramas de Bode, Especificaciones de Desempeño y Estabilidad — Escala en Decibelios y Décadas, Asíntotas de Bode, Ancho de Banda ω_BW y Márgenes de Ganancia (MG) y Fase (MF)

Parte del Curso: Parte 5B — Diagramas de Bode, Especificaciones de Desempeño y Estabilidad
Planta / Sistema Modelado: Trazado de Diagramas de Bode en Decibelios y Análisis de Márgenes de Ganancia (MG) y Fase (MF)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\cdot\log10|G(j\omega)| \quad MG_{dB} = -20\cdot\log10|L(j\omega_{pc})|, \; MF = 180° + \angle L(j\omega_{gc})$$

1. Síntesis de Conceptos Clave y Fórmulas de Ingeniería

- Estructura del Diagrama de Bode: magnitud en decibelios $20\cdot\log10|G(j\omega)|$ y fase en grados contra frecuencia logarítmica ω (conversión de productos en sumas gráficas).
- Pendientes asintóticas: polos/ceros en el origen (±20·N dB/déc, ±90°·N), factores de 1.er orden (±20 dB/déc a partir de $\omega_c = 1/\tau$, corrección ±3 dB) y de 2.º orden (±40 dB/déc a partir de ω_n).
- Especificaciones de desempeño en frecuencia: Ancho de banda a -3 dB (ω_{BW}, con $t_r \approx 1.8 / \omega_{BW}$) y pico de resonancia M_r.
- Estabilidad relativa en Bode de lazo abierto L(jω): Frecuencia de cruce de ganancia ω_{gc} (0 dB), Frecuencia de cruce de fase ω_{pc} (-180°), Margen de Ganancia MG ≥ 6 dB y Margen de Fase MF ∈ [45°, 60°] ($\zeta \approx MF/100$).

2. Parámetros Nominales del Modelo Matemático (Video 10)

Parámetro Físico / Canónico	Símbolo	Valor Nominal	Significado en el Modelado Dinámico
Masa / Momento de Inercia Equivalente	`m_eq / J_eq`	1	Almacenador de energía cinética opositor a cambios de velocidad
Amortiguamiento / Resistencia Equivalente	`c_eq / R_eq`	12	Elemento disipador de energía que gobierna la tasa de atenuación
Rigidez / Elasticidad Equivalente	`k_eq / 1/C`	100	Almacenador de energía potencial restauradora
Frecuencia Natural No Amortiguada	`ω_n [rad/s]`	10 rad/s	Distancia radial de los polos al origen en el plano complejo s
Factor de Amortiguamiento Relativo	`ζ [-]`	0.6	Determina el régimen dinámico y el sobreimpulso máximo M_p
Ganancia Estática / Constante de Tiempo	`K / τ [s]`	K = 2, τ = 0.167 s	Sensibilidad estacionaria y rapidez del modo exponencial e^{-t/τ}

3. Desarrollo Académico Diapositiva por Diapositiva

Diapositiva 01: Introducción a los Diagramas de Bode: Decibelios y Escala Logarítmica

Gráfica de Magnitud 20·log10|G(jω)| [dB] y Gráfica de Fase ∠G(jω) [°] contra log10(ω)

- **Turno 1 (Masculina):** En la Parte cinco B culminamos la teoría del curso dominando la representación gráfica más utilizada en la ingeniería de control, electrónica y mecatrónica: los diagramas de Bode, creados por Hendrik Bode en los laboratorios Bell.
- **Turno 2 (Femenina):** Un diagrama de Bode consta de un par de gráficas superpuestas que comparten el mismo eje horizontal de frecuencia angular omega en escala logarítmica, donde cada intervalo de factor diez se denomina una década.
- **Turno 3 (Masculina):** La gráfica superior representa la magnitud expresada en decibelios, definida como veinte veces el logaritmo en base diez del módulo de ge de jota omega; y la gráfica inferior representa el ángulo de fase en grados.
- **Turno 4 (Femenina):** En la escala de decibelios, una ganancia unitaria de uno equivale exactamente a cero decibelios; multiplicar la amplitud por diez suma veinte decibelios; dividir entre diez resta veinte decibelios; y el factor uno sobre raíz de dos corresponde a menos tres decibelios.

Diapositiva 02: La Propiedad Logarítmica de Bode: De Multiplicaciones a Sumas Gráficas

Forma Normalizada de Constantes de Tiempo (1 + j·ω·τ) y Adición Directa de Pendientes

- **Turno 1 (Masculina):** ¿Por qué graficar la magnitud en decibelios contra el logaritmo de la frecuencia supuso una revolución tan grande para el análisis y diseño de sistemas?
- **Turno 2 (Femenina):** Porque la propiedad fundamental del logaritmo transforma cualquier producto o cociente de factores en una simple suma o resta: el logaritmo de A por B dividido entre C es igual al logaritmo de A, más el logaritmo de B, menos el logaritmo de C.
- **Turno 3 (Masculina):** Para aprovechar esta propiedad, primero reescribimos la función de transferencia en la forma estándar de Bode, dividiendo cada factor para que su término independiente sea igual a la unidad: uno más jota omega por tau.
- **Turno 4 (Femenina):** De este modo, toda función de transferencia se descompone en cuatro ladrillos elementales cuyas curvas individuales se trazan mediante rectas asintóticas y luego simplemente se suman punto a punto.

Diapositiva 03: Trazas de Bode I: Ganancia Constante K y Polos/Ceros en el Origen (jω)^{±N}

Recta Horizontal 20·log10(K) y Rectas Exactas de ±20·N dB/década con Fase de ±90°·N

- **Turno 1 (Masculina):** Veamos los dos primeros ladrillos elementales de Bode. El primero es la ganancia constante ka: su magnitud es una línea horizontal plana ubicada en veinte logaritmo de ka decibelios, y su aporte de fase es cero grados en toda frecuencia.
- **Turno 2 (Femenina):** El segundo ladrillo son los polos o ceros ubicados en el origen, es decir, potencias de jota omega. Para un integrador simple uno sobre jota omega, su magnitud en decibelios es menos veinte veces el logaritmo de omega.
- **Turno 3 (Masculina):** Como el eje horizontal es precisamente el logaritmo de omega, la gráfica de un polo en el origen no es una aproximación sino una línea recta exacta que cae con pendiente de menos veinte decibelios por década, cruzando cero decibelios en omega igual a un radián por segundo, y con fase constante de menos noventa grados.
- **Turno 4 (Femenina):** Simétricamente, un cero en el origen jota omega es una recta que sube a razón de más veinte decibelios por década con fase de más noventa grados; y si el polo o cero en el origen tiene multiplicidad ene, la pendiente vale menos o más veinte por ene decibelios por década.

Diapositiva 04: Trazas de Bode II: Polos y Ceros de Primer Orden (1 + j·ω·τ)^{±1}

Frecuencia de Esquina ω_c = 1/τ, Asíntota de ±20 dB/década y Corrección de ±3 dB

- **Turno 1 (Masculina):** El tercer ladrillo elemental es el factor de primer orden: un polo real simple uno sobre uno más jota omega tau, cuya frecuencia de esquina o de quiebre es omega sub ce igual a uno sobre tau.
- **Turno 2 (Femenina):** Para frecuencias mucho menores que uno sobre tau, el término omega tau es despreciable frente a uno y el logaritmo de uno vale cero: por tanto, la asíntota de baja frecuencia es una línea horizontal en cero decibelios hasta llegar a omega igual a uno sobre tau.
- **Turno 3 (Masculina):** Para frecuencias mayores que uno sobre tau domina el término omega tau, por lo que a partir de la frecuencia de esquina la asíntota quiebra hacia abajo como una recta con pendiente de menos veinte decibelios por década; y la curva real pasa exactamente tres decibelios por debajo del quiebre.
- **Turno 4 (Femenina):** En la gráfica de fase, el polo simple aporta cero grados una década antes de la esquina, pasa por menos cuarenta y cinco grados exactamente en uno sobre tau, y alcanza menos noventa grados una década después; mientras que un cero simple uno más jota omega tau invierte todos los signos hacia arriba.

Diapositiva 05: Trazas de Bode III: Factores Cuadráticos de Segundo Orden

Caída Asintótica de -40 dB/década a partir de ω_n, Pico Resonante según ζ y Salto de Fase a -180°

- **Turno 1 (Masculina):** El cuarto ladrillo elemental es el par de polos complejos conjugados de segundo orden con frecuencia natural omega sub ene y factor de amortiguamiento dseta.
- **Turno 2 (Femenina):** Su aproximación asintótica de magnitud consta de una recta horizontal en cero decibelios para frecuencias menores que omega sub ene, y una recta que cae al doble de velocidad, menos cuarenta decibelios por década, para frecuencias mayores que omega sub ene.
- **Turno 3 (Masculina):** Sin embargo, cerca de la esquina omega sub ene la curva real se aparta de las asíntotas dependiendo de dseta: exactamente en omega igual a omega sub ene, el valor en decibelios es menos veinte por el logaritmo de dos dseta, elevándose un pico resonante pronunciado cuando dseta es pequeño.
- **Turno 4 (Femenina):** En la gráfica de fase, el par de polos cuadráticos arranca en cero grados en baja frecuencia, cruza obligatoriamente por menos noventa grados en omega igual a omega sub ene para cualquier valor de dseta, y desciende hasta menos ciento ochenta grados en alta frecuencia.

Diapositiva 06: Construcción de Diagramas de Bode Compuestos e Identificación Inversa

Suma Acumulativa de Pendientes en cada Frecuencia de Esquina y Lectura de G(s) desde el Bode

- **Turno 1 (Masculina):** Para trazar el diagrama de Bode completo de un sistema con múltiples polos y ceros, ordenamos de menor a mayor todas sus frecuencias de esquina sobre el eje logarítmico.
- **Turno 2 (Femenina):** Comenzamos a la izquierda con la ganancia y la pendiente inicial dada por los polos en el origen. Al llegar a cada frecuencia de esquina, cambiamos la pendiente acumulada: restamos veinte decibelios por década si encontramos un polo simple, sumamos veinte si encontramos un cero simple, y restamos cuarenta si encontramos un par cuadrático.
- **Turno 3 (Masculina):** Este mismo principio nos permite resolver el problema inverso de identificación experimental en el dominio de la frecuencia cuando medimos el Bode de una planta desconocida en el laboratorio.
- **Turno 4 (Femenina):** Si vemos que la curva medida arranca plana en veinte decibelios, en omega igual a dos quiebra a menos veinte decibelios por década, y en omega igual a veinte quiebra a menos cuarenta decibelios por década, deducimos al instante que tiene ganancia diez y dos polos en dos y en veinte radianes por segundo.

Diapositiva 07: Especificaciones de Desempeño en Frecuencia: Ancho de Banda (ω_BW) y Resonancia

Definición del Ancho de Banda a -3 dB en Lazo Cerrado, Relación con t_r y Filtrado de Ruido

- **Turno 1 (Masculina):** Así como en el dominio del tiempo especificábamos tiempo de subida y sobreimpulso, sobre el diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado leemos las especificaciones de desempeño en el dominio de la frecuencia.
- **Turno 2 (Femenina):** La especificación principal es el ancho de banda, denotado por omega sub be doble ve: se define como la frecuencia a la cual la magnitud de lazo cerrado cae tres decibelios por debajo de su ganancia en frecuencia cero.
- **Turno 3 (Masculina):** El ancho de banda mide qué tan rápido es el sistema de control: todas las señales de referencia cuyas frecuencias estén dentro del ancho de banda serán reproducidas fielmente por el actuador, existiendo la relación inversa aproximada donde el tiempo de subida es uno punto ocho dividido entre el ancho de banda.
- **Turno 4 (Femenina):** No obstante, un ancho de banda excesivamente grande también deja pasar el ruido de alta frecuencia de los sensores hacia los actuadores; por ello el diseño óptimo busca un ancho de banda suficiente para la dinámica de la máquina pero que caiga con rapidez en alta frecuencia.

Diapositiva 08: Análisis de Estabilidad en Frecuencia:El Punto Crítico (-1, j0) o (0 dB, -180°)

Frecuencia de Cruce de Ganancia (ω_gc) y Frecuencia de Cruce de Fase (ω_pc) en Lazo Abierto

- **Turno 1 (Masculina):** Una de las aplicaciones más extraordinarias del diagrama de Bode es que nos permite determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado mirando únicamente el diagrama de Bode de la ganancia de lazo abierto ge de jota omega por hache de jota omega.
- **Turno 2 (Femenina):** Recordemos que el denominador de lazo cerrado es uno más ge por hache. El sistema entra en oscilación crítica al borde de la inestabilidad cuando ge de jota omega por hache de jota omega toma el valor complejo menos uno.
- **Turno 3 (Masculina):** Pero el número menos uno expresado en forma polar tiene módulo igual a uno, que equivale a cero decibelios, y ángulo igual a menos ciento ochenta grados: en ese punto la señal realimentada se desfasa media vuelta completa y refuerza la oscilación en lugar de restarla.
- **Turno 4 (Femenina):** Por ello definimos dos frecuencias críticas en el Bode de lazo abierto: la frecuencia de cruce de ganancia omega sub ge ce, donde la curva de magnitud cruza la línea de cero decibelios; y la frecuencia de cruce de fase omega sub pe ce, donde la curva de fase cruza menos ciento ochenta grados.

Diapositiva 09: Estabilidad Relativa: Margen de Ganancia (MG) y Margen de Fase (MF)

Cálculo de MG = -|L(jω_pc)|_dB y MF = 180° + ∠L(jω_gc) y Condición ω_gc < ω_pc

- **Turno 1 (Masculina):** En ingeniería mecatrónica no nos conformamos con que un robot o un dron sea apenas estable en el papel; necesitamos medir su estabilidad relativa, es decir, cuánto margen de seguridad tenemos antes de llegar al punto crítico de cero decibelios y menos ciento ochenta grados.
- **Turno 2 (Femenina):** La primera medida es el margen de ganancia eme ge: nos ubicamos en la frecuencia de cruce de fase omega sub pe ce, donde la fase ya llegó a menos ciento ochenta grados, miramos arriba la curva de magnitud y medimos cuántos decibelios está por debajo de cero decibelios.
- **Turno 3 (Masculina):** El margen de ganancia nos indica en cuántos decibelios podemos aumentar la ganancia del controlador antes de que el sistema empiece a oscilar de forma inestable.
- **Turno 4 (Femenina):** La segunda medida es el margen de fase eme efe: nos ubicamos en la frecuencia de cruce de ganancia omega sub ge ce, donde la magnitud vale cero decibelios, miramos abajo la fase y sumamos ciento ochenta grados más el ángulo actual; para que un sistema de fase mínima sea estable, ambos márgenes deben ser positivos, lo que exige que la frecuencia de cruce de ganancia sea menor que la de cruce de fase.

Diapositiva 10: Criterios de Diseño Robusto en Frecuencia y Efecto del Tiempo Muerto

Márgenes Industriales Recomendados (MG ≥ 6 dB, MF ∈ [45°, 60°]), Relación ζ ≈ MF/100 y Retardo e^{-Ls}

- **Turno 1 (Masculina):** Cerramos los diez módulos técnicos del curso estableciendo los criterios prácticos de diseño robusto que aplicamos en la industria al sintonizar cualquier sistema de control sobre el diagrama de Bode.
- **Turno 2 (Femenina):** Para garantizar una respuesta bien amortiguada y tolerante a variaciones de carga, se exige un margen de ganancia mínimo de entre seis y doce decibelios, y un margen de fase situado entre cuarenta y cinco y sesenta grados.
- **Turno 3 (Masculina):** Existe además un puente directo muy útil entre el margen de fase en grados y el factor de amortiguamiento dseta en el tiempo: para amortiguamientos moderados, dseta es aproximadamente igual al margen de fase en grados dividido entre cien; así, sesenta grados de margen de fase equivalen a dseta igual a cero punto seis.
- **Turno 4 (Femenina):** Finalmente, recordemos por qué un retardo de tiempo muerto ele es tan peligroso: el término e a la menos jota omega por ele tiene módulo uno y no cambia la magnitud, pero resta un ángulo omega por ele que crece linealmente con la frecuencia, consumiendo el margen de fase hasta desestabilizar el lazo cerrado.

4. Firmware C++/Arduino: Integrador RK4 y Filtro de Tustin (simulacion_hil_y_adquisicion_video_10.ino)

```
/*
 * ========================================================================
 * CURSO COMPLETO: MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRÓNICA
 * VIDEO 10: Video 10 — Parte 5B: Diagramas de Bode, Especificaciones de Desempeño y Estabilidad
 * Archivo: simulacion_hil_y_adquisicion_video_10.ino
 * ------------------------------------------------------------------------
 * Descripción Técnica:
 *   Firmware en tiempo real (Ts = 2 ms -> 500 Hz) para simulación Hardware-in-
 *   the-Loop (HIL), integración numérica Runge-Kutta de 4.º orden (RK4) de la
 *   planta mecatrónica "Trazado de Diagramas de Bode en Decibelios y Análisis de Márgenes de Ganancia (MG) y Fase
(MF)",
 *   filtro discreto por Transformada Bilineal de Tustin y adquisición por ADC
 *   para identificación experimental de parámetros (K, tau, wn, zeta).
 *
 * Ecuación Modelo:
 *   |G(jω)|_dB = 20·log10|G(jω)|   |   MG_dB = -20·log10|L(jω_pc)|,   MF = 180° + ∠L(jω_gc)
 * ========================================================================
 */

#include <Arduino.h>

// --- Definición de Pines de Hardware ---
const uint8_t PIN_ADC_PLANTA    = A0;  // Entrada analógica desde sensor real (0..5 V)
const uint8_t PIN_ADC_PERTURB   = A1;  // Perturbación externa / carga medida
const uint8_t PIN_PWM_ACTUADOR  = 9;   // Salida PWM hacia driver / puente H / válvula
const uint8_t PIN_SYNC_SCOPE    = 8;   // Pulso de sincronismo para osciloscopio

// --- Parámetros Físicos del Modelo (Video 10) ---
const float M_EQ       = 1.0000f;   // Masa / Inercia equivalente
const float C_EQ       = 12.0000f;   // Amortiguamiento / Resistencia equivalente
const float K_EQ       = 100.0000f;   // Rigidez / Elasticidad equivalente
const float WN_RAD_S   = 10.000f;  // Frecuencia natural no amortiguada [rad/s]
const float ZETA_REL   = 0.600f; // Factor de amortiguamiento relativo [-]
const float K_GAIN     = 2.000f;   // Ganancia estática de la planta
const float TAU_SEC    = 0.167f; // Constante de tiempo equivalente [s]

// --- Configuración del Reloj de Muestreo en Tiempo Real ---
const float TS_SEC              = 0.002f; // Periodo de integración Ts = 2.0 ms (500 Hz)
const unsigned long TS_MICROS    = 2000UL;
unsigned long prevMicros         = 0;
unsigned long stepCounter        = 0;

// --- Vector de Estado del Integrador RK4: x1 = y(t), x2 = dy(t)/dt ---
float x1_pos = 0.0f;
float x2_vel = 0.0f;
float u_cmd  = 0.0f;

// --- Filtro Digital de 1.er Orden Discretizado por Transformada de Tustin ---
// G_f(s) = K / (tau*s + 1)  -->  y[k] = b0*u[k] + b1*u[k-1] - a1*y[k-1]
float b0_tustin = 0.0f;
float b1_tustin = 0.0f;
float a1_tustin = 0.0f;
float u_prev1   = 0.0f;
float y_tustin  = 0.0f;

// --- Derivadas del Espacio de Estados Continuo: dx1/dt = x2, dx2/dt = f(x1,x2,u) ---
inline void evaluarDerivadasEstado(float x1, float x2, float u, float &dx1, float &dx2) {
  dx1 = x2;
  // Forma canónica de 2.º orden: x2' = K*wn^2*u - 2*zeta*wn*x2 - wn^2*x1
  dx2 = (K_GAIN * WN_RAD_S * WN_RAD_S * u)
      - (2.0f * ZETA_REL * WN_RAD_S * x2)
      - (WN_RAD_S * WN_RAD_S * x1);
}

// --- Paso de Integración Numérica Runge-Kutta de 4.º Orden (RK4) ---
void integrarPasoRK4(float u_in, float dt) {
  float k1_x1, k1_x2, k2_x1, k2_x2, k3_x1, k3_x2, k4_x1, k4_x2;
```

```
  evaluarDerivadasEstado(x1_pos, x2_vel, u_in, k1_x1, k1_x2);
  evaluarDerivadasEstado(x1_pos + 0.5f * dt * k1_x1, x2_vel + 0.5f * dt * k1_x2, u_in, k2_x1, k2_x2);
  evaluarDerivadasEstado(x1_pos + 0.5f * dt * k2_x1, x2_vel + 0.5f * dt * k2_x2, u_in, k3_x1, k3_x2);
  evaluarDerivadasEstado(x1_pos + dt * k3_x1,        x2_vel + dt * k3_x2,        u_in, k4_x1, k4_x2);

  x1_pos += (dt / 6.0f) * (k1_x1 + 2.0f * k2_x1 + 2.0f * k3_x1 + k4_x1);
  x2_vel += (dt / 6.0f) * (k1_x2 + 2.0f * k2_x2 + 2.0f * k3_x2 + k4_x2);
}

// --- Inicialización de Coeficientes Discretos por Regla Trapezoidal (Tustin) ---
void inicializarFiltroTustin() {
  float denom = 2.0f * TAU_SEC + TS_SEC;
  b0_tustin   = (K_GAIN * TS_SEC) / denom;
  b1_tustin   = b0_tustin;
  a1_tustin   = (TS_SEC - 2.0f * TAU_SEC) / denom;
}

void setup() {
  Serial.begin(115200);
  pinMode(PIN_PWM_ACTUADOR, OUTPUT);
  pinMode(PIN_SYNC_SCOPE, OUTPUT);
  inicializarFiltroTustin();
  prevMicros = micros();

  Serial.println(F("# ============================================================"));
  Serial.println(F("# CURSO MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRONICA - VIDEO 10"));
  Serial.println(F("# Columnas CSV: t_s,u_cmd,y_rk4_2do,dy_rk4,y_tustin_1ro,adc_V"));
  Serial.println(F("# ============================================================"));
}

void loop() {
  unsigned long nowMicros = micros();
  if (nowMicros - prevMicros >= TS_MICROS) {
    prevMicros += TS_MICROS;
    float t_sec = stepCounter * TS_SEC;

    // 1. Generar entrada de prueba: Escalón unitario + barrido senoidal suave
    if (t_sec < 0.2f) {
      u_cmd = 0.0f;
    } else if (t_sec < 3.0f) {
      u_cmd = 1.0f; // Respuesta al escalón unitario u_s(t)
      digitalWrite(PIN_SYNC_SCOPE, HIGH);
    } else {
      // Excitación armónica para medir respuesta en frecuencia G(jw)
      u_cmd = 1.0f + 0.5f * sinf(WN_RAD_S * (t_sec - 3.0f));
      digitalWrite(PIN_SYNC_SCOPE, LOW);
    }

    // 2. Actualizar gemelo digital de 2.º orden por RK4
    integrarPasoRK4(u_cmd, TS_SEC);

    // 3. Actualizar modelo de 1.er orden por Transformada de Tustin
    y_tustin = b0_tustin * u_cmd + b1_tustin * u_prev1 - a1_tustin * y_tustin;
    u_prev1  = u_cmd;

    // 4. Leer planta física real en el ADC y comandar salida PWM
    float adcVolt = analogRead(PIN_ADC_PLANTA) * (5.0f / 1023.0f);
    int pwmVal    = constrain((int)(x1_pos * 127.0f + 128.0f), 0, 255);
    analogWrite(PIN_PWM_ACTUADOR, pwmVal);

    // 5. Transmitir telemetría cada 5 pasos (10 ms -> 100 Hz)
    if (stepCounter % 5 == 0) {
      Serial.print(t_sec, 3);      Serial.print(',');
      Serial.print(u_cmd, 4);      Serial.print(',');
      Serial.print(x1_pos, 4);     Serial.print(',');
      Serial.print(x2_vel, 4);     Serial.print(',');
      Serial.print(y_tustin, 4);   Serial.print(',');
```

```
      Serial.println(adcVolt, 3);
    }
    stepCounter++;
  }
}
```

5. Script Python: Polos, Respuesta Temporal y Bode (modelado_laplace_y_bode_video_10.py)

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
================================================================================
CURSO COMPLETO: MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRÓNICA
VIDEO 10: Video 10 – Parte 5B: Diagramas de Bode, Especificaciones de Desempeño y Estabilidad
Archivo: modelado_laplace_y_bode_video_10.py
--------------------------------------------------------------------------------
Descripción:
  Script integral en Python para simulación de ecuaciones diferenciales (RK4),
  análisis de sistemas de 1.er y 2.º orden, cálculo exacto de polos y ceros
  en el plano complejo s, especificaciones transitorias (tr, tp, Mp, ts),
  evaluación fasorial G(jw), trazado de Diagramas de Bode y cálculo de
  Márgenes de Ganancia (MG) y de Fase (MF).
================================================================================
"""

import math
from typing import Dict, List, Tuple

# Parámetros nominales del Video 10: Trazado de Diagramas de Bode en Decibelios y Análisis de Márgenes de Ganancia
(MG) y Fase (MF)
M_EQ     = 1
C_EQ     = 12
K_EQ     = 100
WN_RAD   = 10
ZETA     = 0.6
K_STATIC = 2
TAU_SEC  = 0.167


def metricas_primer_orden(K: float, tau: float, escalon_A: float = 1.0) -> Dict[str, float]:
    """Calcula las medidas de desempeño exactas de G(s) = K / (tau*s + 1)."""
    y_ss = K * escalon_A
    y_1tau = y_ss * (1.0 - math.exp(-1.0))
    t_d = tau * math.log(2.0)          # 50% del valor final
    t_r = tau * math.log(9.0)          # 10% al 90% (~2.197 * tau)
    t_s_5pct = 3.0 * tau               # Banda del +-5%
    t_s_2pct = 4.0 * tau               # Banda del +-2%
    omega_c = 1.0 / tau                # Frecuencia de esquina (-3 dB, -45 deg)
    return {
        "y_ss": round(y_ss, 4),
        "y_en_1tau_63pct": round(y_1tau, 4),
        "tiempo_retardo_td_s": round(t_d, 4),
        "tiempo_subida_tr_s": round(t_r, 4),
        "tiempo_establecimiento_5pct_s": round(t_s_5pct, 4),
        "tiempo_establecimiento_2pct_s": round(t_s_2pct, 4),
        "frecuencia_esquina_wc_rads": round(omega_c, 4),
    }


def metricas_segundo_orden(K: float, wn: float, zeta: float) -> Dict[str, object]:
    """Calcula polos en el plano s y métricas (wd, tr, tp, Mp, ts, wr, Mr, w_BW)."""
    sigma = zeta * wn
    if zeta < 1.0:
        wd = wn * math.sqrt(1.0 - zeta ** 2)
        polos = f"-{sigma:.3f} +- j*{wd:.3f}"
        regimen = "Subamortiguado (0 < zeta < 1)" if zeta > 0 else "No amortiguado"
        tr = (math.pi - math.acos(zeta)) / wd
        tp = math.pi / wd
        mp = math.exp(-math.pi * zeta / math.sqrt(1.0 - zeta ** 2))
    elif abs(zeta - 1.0) < 1e-6:
        wd = 0.0
        polos = f"-{sigma:.3f} (Raíz real doble)"
        regimen = "Críticamente amortiguado (zeta = 1)"
        tr = 3.35 / wn
        tp = float("inf")
```

```
        mp = 0.0
    else:
        wd = 0.0
        r1 = -sigma + wn * math.sqrt(zeta ** 2 - 1.0)
        r2 = -sigma - wn * math.sqrt(zeta ** 2 - 1.0)
        polos = f"s1 = {r1:.3f}, s2 = {r2:.3f}"
        regimen = "Sobreamortiguado (zeta > 1)"
        tr = 2.2 / abs(r1)
        tp = float("inf")
        mp = 0.0

    ts_2pct = 4.0 / sigma if sigma > 0 else float("inf")

    # Resonancia y Ancho de Banda en frecuencia
    if zeta < 1.0 / math.sqrt(2.0):
        wr = wn * math.sqrt(1.0 - 2.0 * (zeta ** 2))
        mr = 1.0 / (2.0 * zeta * math.sqrt(1.0 - zeta ** 2))
        mr_db = 20.0 * math.log10(mr)
    else:
        wr = 0.0
        mr = 1.0
        mr_db = 0.0

    w_bw = wn * math.sqrt((1.0 - 2.0 * zeta ** 2) + math.sqrt(4.0 * zeta ** 4 - 4.0 * zeta ** 2 + 2.0))

    return {
        "regimen": regimen,
        "polos_plano_s": polos,
        "atenuacion_sigma": round(sigma, 4),
        "frecuencia_amortiguada_wd_rads": round(wd, 4),
        "tiempo_subida_tr_s": round(tr, 4),
        "tiempo_pico_tp_s": round(tp, 4) if math.isfinite(tp) else None,
        "sobreimpulso_Mp_pct": round(mp * 100.0, 2),
        "tiempo_establecimiento_ts_2pct_s": round(ts_2pct, 4),
        "frecuencia_resonancia_wr_rads": round(wr, 4),
        "pico_resonancia_Mr_dB": round(mr_db, 2),
        "ancho_banda_wBW_rads": round(w_bw, 4),
    }


def evaluar_respuesta_frecuencia_bode(
    K: float, wn: float, zeta: float, frecuencias_rads: List[float]
) -> List[Dict[str, float]]:
    """Evalúa G(jw) = K / ((1 - u^2) + j*(2*zeta*u)) con u = w / wn."""
    tabla_bode = []
    for w in frecuencias_rads:
        u = w / wn
        parte_real = 1.0 - (u ** 2)
        parte_imag = 2.0 * zeta * u
        mag_abs = K / math.sqrt(parte_real ** 2 + parte_imag ** 2)
        mag_db = 20.0 * math.log10(max(mag_abs, 1e-12))
        fase_deg = -math.degrees(math.atan2(parte_imag, parte_real))
        tabla_bode.append({
            "w_rads": round(w, 3),
            "u_norm": round(u, 3),
            "mag_abs": round(mag_abs, 4),
            "mag_dB": round(mag_db, 2),
            "fase_deg": round(fase_deg, 2),
        })
    return tabla_bode


def identificar_segundo_orden_desde_escalon(
    u_escalon: float, y_estacionario: float, y_pico_max: float, t_pico_s: float
) -> Dict[str, float]:
    """Identifica experimentalmente (K, Mp, zeta, wn) a partir de la curva medida."""
    K_id = y_estacionario / u_escalon
    mp_id = max(0.0, (y_pico_max - y_estacionario) / y_estacionario)
```

```
    if mp_id > 0.0:
        ln_mp = abs(math.log(mp_id))
        zeta_id = ln_mp / math.sqrt(math.pi ** 2 + ln_mp ** 2)
    else:
        zeta_id = 1.0
    wn_id = math.pi / (t_pico_s * math.sqrt(max(1e-6, 1.0 - zeta_id ** 2)))
    return {
        "K_identificada": round(K_id, 4),
        "Mp_medido": round(mp_id, 4),
        "zeta_identificado": round(zeta_id, 4),
        "wn_identificada_rads": round(wn_id, 4),
    }


if __name__ == "__main__":
    print("=" * 76)
    print(" CURSO: MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRÓNICA — VIDEO 10")
    print(" Planta:", "Trazado de Diagramas de Bode en Decibelios y Análisis de Márgenes de Ganancia (MG) y Fase
(MF)")
    print("=" * 76)

    m1 = metricas_primer_orden(K_STATIC, TAU_SEC)
    print("\n[1] Análisis de Sistema de Primer Orden (K, tau):", m1)

    m2 = metricas_segundo_orden(K_STATIC, WN_RAD, ZETA)
    print("\n[2] Análisis de Sistema de Segundo Orden (K, wn, zeta):", m2)

    freqs = [0.1 * WN_RAD, 0.5 * WN_RAD, WN_RAD, 2.0 * WN_RAD, 10.0 * WN_RAD]
    bode_pts = evaluar_respuesta_frecuencia_bode(K_STATIC, WN_RAD, ZETA, freqs)
    print("\n[3] Tabla de Respuesta en Frecuencia y Diagrama de Bode G(jw):")
    for row in bode_pts:
        print(f"    w = {row['w_rads']:7.2f} rad/s | |G| = {row['mag_abs']:6.4f} ({row['mag_dB']:6.2f} dB) | fase
= {row['fase_deg']:7.2f} deg")

    id_res = identificar_segundo_orden_desde_escalon(1.0, 1.0, 1.254, 0.343)
    print("\n[4] Ejemplo de Identificación Experimental desde Escalón:", id_res)
```

6. Script MATLAB/Octave: Funciones de Transferencia y Estabilidad (analisis_control_mecatronico_video_10.m)

```
% ========================================================================
% CURSO COMPLETO: MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRÓNICA
% VIDEO 10: Video 10 – Parte 5B: Diagramas de Bode, Especificaciones de Desempeño y Estabilidad
% Archivo: analisis_control_mecatronico_video_10.m
% ------------------------------------------------------------------------
% Descripción:
%   Script para MATLAB / GNU Octave que construye las funciones de
%   transferencia en Laplace con tf(), calcula polos, ceros y factor de
%   amortiguamiento con damp(), simula la respuesta al escalón step() y al
%   impulso impulse(), cierra el lazo de realimentación con feedback(),
%   traza el Diagrama de Bode con márgenes de estabilidad margin() y el
%   Lugar Geométrico de las Raíces rlocus().
% ========================================================================

clear; clc; close all;
fprintf('========================================================================\n');
fprintf(' CURSO: MODELADO DE SISTEMAS EN MECATRONICA - VIDEO 10\n');
fprintf(' Planta: Trazado de Diagramas de Bode en Decibelios y Análisis de Márgenes de Ganancia (MG) y Fase
(MF)\n');
fprintf('========================================================================\n\n');

%% 1. Definicion de Parametros Fisicos y Canónicos
m_eq   = 1;
c_eq   = 12;
k_eq   = 100;
wn     = 10;
zeta   = 0.6;
K_gain = 2;
tau    = 0.167;

s = tf('s');

%% 2. Funcion de Transferencia de Primer Orden: G1(s) = K / (tau*s + 1)
G1 = K_gain / (tau * s + 1);
fprintf('--- Sistema de Primer Orden G1(s) ---\n');
disp(G1);

%% 3. Funcion de Transferencia de Segundo Orden: G2(s) = K*wn^2 / (s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2)
num_G2 = [200.0];
den_G2 = [1.0, 12.0, 100.0, 0.0];
G2 = tf(num_G2, den_G2);
fprintf('--- Sistema Principal del Video 10: G2(s) ---\n');
disp(G2);

fprintf('--- Polos, Factor de Amortiguamiento (zeta) y Frecuencia Natural (wn) ---\n');
damp(G2);
polos_G2 = pole(G2);
ceros_G2 = zero(G2);

%% 4. Reduccion de Diagramas de Bloques: Serie, Paralelo y Lazo Cerrado T(s)
Kp_ctrl = 4.0;
Ki_ctrl = 8.0;
Gc = Kp_ctrl + Ki_ctrl / s;          % Controlador PI en paralelo
L_abierto = series(Gc, G2);          % Sistemas en serie L(s) = Gc(s)*G2(s)
H_sensor  = 1.0;                     % Realimentacion unitaria H(s) = 1
T_cerrado = feedback(L_abierto, H_sensor, -1); % T(s) = G(s) / (1 + G(s)H(s))

fprintf('--- Funcion de Transferencia en Lazo Cerrado T(s) ---\n');
disp(T_cerrado);

%% 5. Graficas en el Dominio del Tiempo (Escalon e Impulso) y Plano Complejo s
figure('Name', 'Video 10 - Respuestas Dinamicas y Mapa de Polos', 'Color', 'w', 'Position', [80 80 1100 720]);

subplot(2,2,1);
step(G1, 'b--', G2, 'r-', T_cerrado, 'g-.');
grid on;
title('Respuesta al Escalon Unitario u_s(t)');
```

```
legend('1.er Orden G_1(s)', 'Planta G_2(s)', 'Lazo Cerrado T(s)', 'Location', 'best');

subplot(2,2,2);
impulse(G2, 'r-', T_cerrado, 'g-.');
grid on;
title('Respuesta al Impulso Unitario \delta(t)');
legend('Planta G_2(s)', 'Lazo Cerrado T(s)', 'Location', 'best');

subplot(2,2,3);
pzmap(G2, 'r', T_cerrado, 'g');
grid on;
title('Ubicacion de Polos (x) y Ceros (o) en el Plano Complejo s');

subplot(2,2,4);
rlocus(L_abierto);
grid on;
title('Lugar Geometrico de las Raices (Root Locus)');

%% 6. Respuesta en Frecuencia: Diagrama de Bode y Margenes de Estabilidad (MG, MF)
figure('Name', 'Video 10 - Diagrama de Bode y Estabilidad Relativa', 'Color', 'w', 'Position', [140 100 980 680]);
margin(L_abierto);
grid on;

[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(L_abierto);
Gm_dB = 20 * log10(Gm);
fprintf('\n=== ESPECIFICACIONES DE ESTABILIDAD EN FRECUENCIA (VIDEO 10) ===\n');
fprintf('  Margen de Ganancia (MG)            : %.2f dB (en w_pc = %.3f rad/s)\n', Gm_dB, Wcp);
fprintf('  Margen de Fase (MF)                : %.2f deg (en w_gc = %.3f rad/s)\n', Pm, Wcg);
fprintf('  Amortiguamiento equivalente (MF/100): %.3f\n', Pm / 100.0);
```